Quaternions, algèbres de Clifford : nouveaux outils mathématiques pour la modélisation classique et relativiste

Prof. Dr. Patrick R. Girard

Université de Lyon, Creatis, INSA-Lyon

France

patrick.girard@creatis.insa-lyon.fr

Pôle de Mathématiques, INSA-Lyon

26 novembre 2009

I. Introduction

William Rowan Hamilton (1805 – 1865)

-Quaternions (1843) $\mathbb{H}$, biquaternions $\mathbb{H} \otimes \mathbb{C}$

Hermann Günther Grassmann (1809 – 1877)

-Ausdehnungslehre (1844) $\Rightarrow$ exterior product

William Kingdom Clifford (1845 – 1879)

-Clifford algebras (1878), tetraquaternions $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$

II. Grassmann-Hamilton-Clifford algebras

1. Definition

Algebra composed of n generators $e_1, e_2, ...e_n$ such that

$$e_i e_j = -e_j e_i \, (i \neq j)$$

and

$$e_i^2 = \pm 1.$$

2. Théorème de Clifford (1878) :

Si $n = 2m$ (m entier), l'algèbre de Clifford C_{2m} est le produit tensoriel de m algèbres de quaternions. Si $n = 2m - 1$, l'algèbre de Clifford C_{2m-1} est le produit tensoriel de $m - 1$ algèbres de quaternions et de l'algèbre $(1, \omega)$ où ω est le produit des $2m$ générateurs ($\omega = e_0 e_1 \cdots e_{2m-1}$) de l'algèbre C_{2m}.

n=1, $\mathbb{C}$ complexes

n=2, $\mathbb{H}$ quaternions

n=3, $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ biquaternions

n=4, $\mathbb{H}(\mathbb{H})$ tétraquaternions

III. Euclidean 1 space (n=1)

$$ds^2 = dx^2$$

Clifford algebra ($\mathbb{C}$)

1	$e_1 = i$

$$X = xi$$

$$X.X = -X^2 = x^2$$

$$ds^2 = dX.dX = dx^2$$

$\Rightarrow$ 1D classical physics (complex Fourier transform, 1D analytic signal, 1D imaging)

IV. Euclidean 2 space ($n = 2$)

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

1. Clifford algebra : $\mathbb{H}$

1	$i = e_1 e_2$	$j = e_1$	$k = e_2$

$e_1^2 = e_2^2 = -1, e_1 e_2 = -e_2 e_1$

general element of the algebra :

$A = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k = (\mathrm{a}_0, \mathbf{a})$

$$AB = (a_0 b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, a_0 \mathbf{b} + b_0 \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

Conjugate of $A : A_c = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k$ with $(AB)_c = (B_c)(A_c)$

Dual of $A : A^* = iA$

2. Vectors

a. Norm

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

$$x_c = -x$$

$$x x_c = -x^2 = x_1^2 + x_2^2$$

unit vector : $x x_c = 1$

b. Interior and exterior products

$x, y \in$ vectors

$$x.y = -\frac{1}{2}(xy + yx) = x_1y_1 + x_2y_2$$

$$x \wedge y = -\frac{1}{2}(xy - yx) = (x_2y_1 - x_1y_2)\, i \in \text{bivector}$$

other product (B : bivector) :

$$x.B = \frac{1}{2}(xB - Bx) \in \text{vector}$$

$$B.B' = \frac{1}{2}\left(BB' + B'B\right) \in \text{scalaire}$$

3. Orthogonal projection of a vector u on the vector a

$$u_{||} = -(u.a)\,a^{-1}, u_{\perp} = -(u \wedge a)\,a^{-1}$$

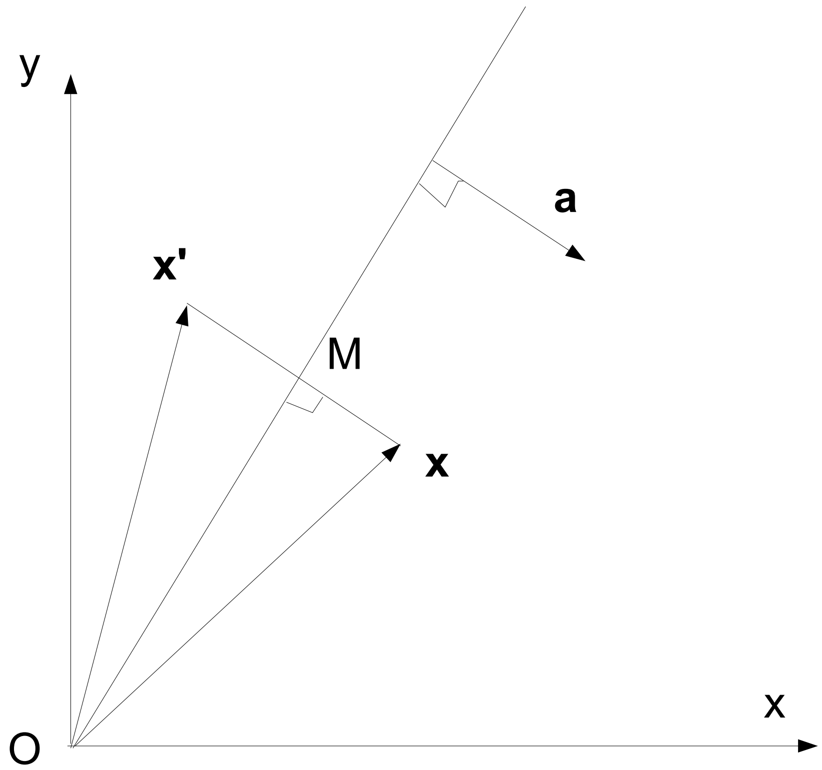
4. Orthogonal symmetry with respect to a hyperplane

(hyperplane : space of dimension $n-1$)

a : unit vector ($aa_c = 1$) perpendicular to the hyperplane

$x', x \in$ vectors

$$x' = axa$$



y
a
x'
M
x
x
O

5. Rotation

$$x' = r x r_c$$

with $r r_c = 1$, $r = (\cos\theta/2 + i \sin\theta/2) \in (C^+$: even subalgebra)

(rotation of x by an angle θ around O) ;

same formula for any element A

$$A' = r A r_c$$

6. Frenet frame

$$OM = x(t)e_1 + y(t)e_2$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, u = \frac{dOM}{ds} = e_{1m}$$

$$\frac{de_{1m}}{ds} = \frac{e_{2m}}{R}, \frac{de_{2m}}{ds} = -\frac{e_{1m}}{R}$$

$$B = u \wedge \frac{du}{ds} = \frac{e_{1m} \wedge e_{2m}}{R} = -\frac{i}{R} \Rightarrow BB_c = \frac{1}{R^2}$$

$\Rightarrow$ 2D classical physics (quaternion Fourier transform, 2D analytic signal, 2D imaging)

7. 2D analytic signal (F. Sommen, G. Sommer)

$$\underline{F(u,v)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-2\pi jux}e^{-2\pi kvy}dxdy$$

$$\underline{F_A(u,v)} = [1 + sign(u)]\,[1 + sign(v)]\,\underline{F(u,v)}$$

$$\begin{aligned}\underline{f_A(x)} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \underline{F_A(u,v)}e^{2\pi kvy}e^{2\pi jux}dudv \\ &= \left|\underline{f_A(x)}\right| e^{i\theta_1}e^{j\theta_2}e^{k\theta_3}\end{aligned}$$

Example : $f(x,y) = \cos x \cos y = S[\underline{f_A(x,y)}],\ \underline{f_A(x,y)} = e^{ky}e^{jx}.$

V. Euclidean 3 space ($n = 3$)

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

1. Biquaternion algebra ($\mathbb{H} \otimes \mathbb{C}$)

$\mathrm{e}_1 = iI, e_2 = jI, e_3 = kI, (e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1, I^2 = -1)$

1	$i = e_3 e_2$	$j = e_1 e_3$	$k = e_2 e_1$
$I = e_1 e_2 e_3$	$e_1 = iI$	$e_2 = jI$	$e_3 = kI$

.

$$\begin{aligned} X &= x(iI) + y(jI) + k(kI) \\ X.X &= X^2 = x^2 + y^2 + k^2 \end{aligned}$$

Elément général de l'algèbre : A

$$\begin{aligned} A &= (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) \\ &\quad + I\,(b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k) \end{aligned}$$

Feuille de calculs : $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ (*Mathematica*)

```
<<Algebra`Quaternions`
```

$a = Quaternion[1, I, 2 + I, 1]$

$b = Quaternion[2, 0, 0, 3I]$

$a * * b$

$out = Quaternion[2 - 3I, -3 + 8I, 7 + 2I, 2 + 3I]$

Conjugué de A :

$$\begin{aligned} A_c &= (a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k) \\ &\quad +I\,(b_0 - b_1 i - b_2 j - b_3 k) \end{aligned}$$

avec $(AB)_c = (B_c)\,(A_c)$

Dual de A :

$$A^* = IA$$

2. Vecteurs

a. Norme

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

$$x_c = -x$$

$$xx = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

vecteur unitaire : $xx = 1$

b. Produits intérieurs et extérieurs

$x, y \in$ vecteurs

$$x.y = \frac{1}{2}(xy + yx) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

$$\begin{aligned} x \wedge y &= \frac{1}{2}(xy - yx) \\ &= (x_3y_2 - x_2y3)\,i + (-x_3y_1 + x_1y3)\,i + (x_2y_1 - x_1y_2)\,k \\ &\in \text{bivecteurs} \end{aligned}$$

vecteurs orthogonaux : $x.y = 0$

autres produits :

$$x.B = \frac{1}{2}(xB - Bx)$$

$$x \wedge B = \frac{1}{2}(xB + Bx) \in T$$

$$x.T = \frac{1}{2}(xT + Tx) \in \text{bivecteur}$$

$$B.B' = \frac{1}{2}\left(BB' + B'B\right) \in \text{scalaire}$$

$$\left[B, B'\right] = \frac{1}{2}\left(BB' - B'B\right) \in \text{bivecteur}$$

$$T.T' = \frac{1}{2}\left(TT' + T'T\right) \in \text{scalaire}$$

$$B.T = \frac{1}{2}(BT + TB) \in \text{vecteur}$$

3. Projection orthogonale d'un vecteur u sur le vecteur a

$u = u_{||} + u_{\perp}$

$$u_{||} = (u.a)\, a^{-1}, u_{\perp} = (u \wedge a)\, a^{-1}$$

4. Projection orthogonale d'un plan B_1 sur un plan B_2

$B_1 = B_{1_{||}} + B_{1\perp}$

$$B_{1_{||}} = (B_1.B_2)\, B_2^{-1}, B_{1\perp} = [B_1, B_2]\, B_2^{-1}$$

5. Symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan

(a : vecteur unitaire perpendiculaire à l'hyperplan, $aa = 1$)

$x', x \in$ vecteurs

$$x' = -axa$$

6. Rotation

$$x' = rxr_c$$

avec $rr_c = 1 \ \left(r \in C^+\right)$

$$r = (\cos\theta/2 + \boldsymbol{u}\sin\theta/2) \in C^+$$

$(u = u_1 i + u_2 j + u_3 k, u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1)$

rotation conique de x d'un angle θ autour du vecteur $I\mathbf{u}$

$$x' x_c = x x_c$$

même formule pour tout élément A

$$A' = rAr_c$$

7. Repère de Frenet

$$OM = x(t)e_1 + y(t)e_2 + z(t)e_3$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, u = \frac{dOM}{ds} = e_{1m}$$

$$\begin{aligned}
\frac{de_{1m}}{ds} &= \frac{e_{2m}}{R}, \\
\frac{de_{2m}}{ds} &= -\frac{e_{1m}}{R} + \frac{e_{3m}}{T}, \\
\frac{de_{3m}}{ds} &= -\frac{e_{2m}}{T}
\end{aligned}$$

$$B_1 = u \wedge \frac{du}{ds}, \Rightarrow B_1 B_{1c} = \frac{1}{R^2} \Rightarrow R$$

$$T_1 = u \wedge \frac{du}{ds} \wedge \frac{d^2u}{ds^2}, \Rightarrow T_1 T_{1c} = -\frac{1}{R^4 T^2} \Rightarrow T$$

$\Rightarrow$ Darboux etc.

$\Rightarrow$ 3D classical physics (Clifford Fourier transform, 3D analytic signal, 3D imaging)

VI. Pseudo-eucliden space ($n = 4$)

pseudo-euclidean metric (relativistic)

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

$e_0 = j, e_1 = kI, e_1 = kJ, e_3 = kK, (e_0^2 = -1, e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1)$

$\Rightarrow$ tetraquaternion algebra ($\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$)

1	$I = e_3 e_2$	$J = e_1 e_3$	$K = e_2 e_1$
$i = e_0 e_1 e_2 e_3$	$iI = e_0 e_1$	$iJ = e_0 e_2$	$iK = e_0 e_3$
$j = e_0$	$jI = e_0 e_3 e_2$	$jJ = e_0 e_1 e_3$	$jK = e_0 e_2 e_1$
$k = e_1 e_2 e_3$	$kI = e_1$	$kJ = e_2$	$kK = e_3$

.

$$\begin{aligned} X &= ct(j) + x(kI) + y(kJ) + z(kK) \\ X.X &= -X^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - k^2 \end{aligned}$$

Elément général de l'algèbre : A

$$A = (a + ib + jc + kd; \mathbf{m} + i\mathbf{n} + j\mathbf{r} + k\mathbf{s})$$

avec $\mathbf{m} =m_1 I + m_2 + m_3 K$, etc.

Conjugué de A :

$$A_c = (a + ib - jc + kd; -\mathbf{m} - i\mathbf{n} + j\mathbf{r} - k\mathbf{s})$$

avec $(AB)_c = (B_c)\,(A_c)$

Dual de A :

$$A^* = iA$$

2. Vecteurs

a. Norme

$$x = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

$$x_c = -x$$

$$x x_c = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

avec $x_0 = ct$;

vecteur unitaire (de type temps) : $u u_c = 1$

vecteur unitaire (de type espace) : $u u_c = -1$

b. Produits intérieurs et extérieurs

$x, y \in$ vecteurs

$$x.y = -\frac{1}{2}(xy + yx) = x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3$$

$$\begin{aligned} x \wedge y &= -\frac{1}{2}(xy - yx) \\ &= (x_2y_3 - x_3y_2)\, I + (x_3y_1 - x_1y_3)\, J + (x_1y_2 - x_2y_1)\, K \\ &\quad + (x_1y_0 - x_0y_1)\, iI + (x_2y_0 - x_0y_2)\, iJ + (x_3y_0 - x_0y_3)\, iK \\ &\in \text{bivecteurs (B)} \end{aligned}$$

vecteurs orthogonaux : $x.y = 0$ autres produits :

$$x.B = \frac{1}{2}(xB - Bx) \in V$$

$$x \wedge B = \frac{1}{2}(xB + Bx) \in T$$

Rem.

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$

le produit extérieur est associatif ;

$$x.T = \frac{1}{2}(xT + Tx) \in \text{bivecteur}$$

$$x \wedge T = \frac{1}{2}(xT - Tx) \in \text{pseudo-scalaire}$$

$$T.T' = \frac{1}{2}\left(TT' + T'T\right) \in \text{scalaire}$$

3. Projection orthogonale d'un vecteurs u sur le vecteur a

$u = u_{||} + u_{\perp}$

$$u_{||} = -\,(u.a)\,a^{-1}$$

$$u_{\perp} = -\,(u \wedge a)\,a^{-1}$$

4. Projection orthogonale d'un vecteur u sur un plan B

$$u_{||} = (u.B)\,B^{-1}$$

$$u_{\perp} = [u \wedge B]\,B^{-1}$$

etc.

5. Symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan

(hyperplan : espace de dimension $n-1$;$x', x \in$ vecteurs)

symétrie de type temps $(aa_c = 1)$

$$x' = axa$$

symétrie de type espace $(aa_c = -1)$

$$x' = -axa$$

6. Groupe pseudo-orthogonal $O(1,3)$

Transformation de Lorentz propre orthochrone

$$x' = axa_c$$

avec $aa_c = 1$ $\left(a \in C^+\right)$; $a = br$ ou rb

$$r = (\cos\theta/2 + \boldsymbol{u}\sin\theta/2) \in C^+$$

rotation conique de x d'un angle θ autour du vecteur $k\mathbf{u}$ ($u = u_1 I + u_2 J + u_3 K, u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$)

$$b = (\cosh\theta/2 + i\boldsymbol{v}\sinh\theta/2) \in C^+$$

$(v = v_1 i + v_2 j + v_3 k, v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1)$

$$x' x_c = x x_c$$

même formule pour tout élément A

$$A' = a A a_c$$

6. Repère mobile relativiste

$$OM = cte_0 + x(t)e_1 + y(t)e_2 + z(t)e_3$$

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

$$u = \frac{dOM}{ds} = e_{0m}$$

$$\begin{aligned}
\frac{de_{0m}}{ds} &= \frac{e_{1m}}{R_1}, \\
\frac{de_{1m}}{ds} &= \frac{e_{0m}}{R_1} + \frac{e_{2m}}{R_2}, \\
\frac{de_{2m}}{ds} &= -\frac{e_{1m}}{R_2} + \frac{e_{3m}}{T} \\
\frac{de_{3m}}{ds} &= -\frac{e_{2m}}{T}
\end{aligned}$$

Hyp. : $R_1 > 0, R_2 > 0; 1/R_1$: première courbure ;$1/R_2$: deuxième courbure ;$1/T$: torsion ;

$$B_1 = u \wedge \frac{du}{ds} = \frac{e_{0m} \wedge e_{1m}}{R_1}$$

$$\Rightarrow B_1 B_{1c} = -\frac{1}{R_1^2} \Rightarrow R_1$$

$$T_1 = u \wedge \frac{du}{ds} \wedge \frac{d^2u}{ds^2} = \frac{e_{0m} \wedge e_{1m} \wedge e_{3m}}{R_1^2 R_2}$$

$$\Rightarrow T_1 T_{1c} = \frac{1}{R_1^4 R_2^2} \Rightarrow R_2$$

$$
\begin{aligned}
P_1 &= u \wedge \frac{du}{ds} \wedge \frac{d^2u}{ds^2} \wedge \frac{d^3u}{ds^3} = \frac{e_{0m} \wedge e_{1m} \wedge e_{2m} \wedge e_{3m}}{R_1^3 R_2^2 T} = \frac{i}{R_1^3 R_2^2 T} \\
&\Rightarrow T
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ relativistic invariants R_1, R_2, T.

$\Rightarrow$ 4D relativistic physics (electromagnetisme, special relativity, general relativity, 4D Clifford Fourier transform, 4D analytic signal, 4D imaging)

Conclusion : Quaternions, Grassmann-Hamilton-Clifford algebras :

new mathematical tools for classical and relativistic modeling.

patrick.girard@creatis.insa-lyon.fr

Université de Lyon, Creatis, Insa

France

Book : Patrick R. Girard, Quaternions, Clifford algebras and Relativistic Physics (Basel, Birkhauser, 2007)