MATHÉMATIQUES EN PREMIER CYCLE
PRÉSENTATION DU PROGRAMME

Notre cadre de réflexion

La proposition de programme qui suit est bien sûr issue d'une demande du Premier Cycle : demande de rénovation des contenus et surtout d'adaptation aux évolutions du public. Notre réflexion a donc tenté d'y répondre au mieux, tout en respectant un certain nombre de contraintes qu'il convient sans doute de préciser au préalable :

- Notre réflexion a porté sur l'ensemble des contenus relevant de la discipline mathématique au Premier Cycle. Elle n'interfère donc pas avec le découpage en modules d'enseignement. En particulier, elle inclut les contenus mathématiques enseignés au sein du module OMSI.
- Les horaires affectés aux mathématiques sont faibles, eu égard à la fois aux difficultés des étudiants et au caractère fondamental de cet enseignement. Ce déséquilibre au détriment de notre discipline explique en grande partie certaines des difficultés que rencontrent nos élèves en mathématiques et en sciences en général. Nous avons pris cependant pour hypothèse de travail le cadre des horaires actuels de mathématiques, tous modules confondus.
- À leur entrée à l'INSA, nos élèves connaissent des difficultés réelles, y compris à mener à bien des calculs pourtant assez élémentaires. Cette évolution est un fait qu'il nous faut prendre en compte, mais constitue surtout un challenge qu'il nous faut surmonter. Ce point a donc été central dans notre réflexion : nous y reviendrons ci-dessous.
- Pour autant, le niveau des compétences scientifiques attendues d'un ingénieur INSA ne diminue pas. Il ne pouvait donc être question de reporter sur les départements une charge d'enseignement pour laquelle ces derniers ne disposent pas de marge horaire pour y faire face.
- Enfin, notre proposition se place dans le cadre d'une évolution naturelle (et qui devrait être périodique) des contenus enseignés en Premier Cycle. S'il y a donc continuité avec la pratique actuelle, ceci ne nous a pas empêchés de proposer quelques changements significatifs.

Les grandes lignes directrices

De même qu'on ne peut réduire l'enseignement des sciences de l'ingénieur à une compilation même ordonnée de techniques et de recettes, l'enseignement des mathématiques ne peut se concevoir comme une simple formation à des outils utilisables ensuite dans d'autres disciplines. Notre premier présupposé a été par conséquent de réfléchir dans le cadre d'une formation scientifique de haut niveau sur cinq années.
Bien entendu la contribution des mathématiques à cette formation doit se traduire relativement tôt chez les élèves par la maîtrise progressive de méthodes d'analyse, de calculs, de résolution de problèmes susceptibles d'être mobilisés avec profit dans l'ensemble des disciplines. Nous pensons aussi que les collaborations interdisciplinaires enrichissent les différents champs disciplinaires et contribuent positivement à qualité de la formation : elles doivent donc être développées.

Les difficultés croissantes rencontrées par les élèves sont l'obstacle majeur à cette exigence scientifique. On pourrait d'ailleurs dire que les mathématiques – si elles ne sont pas les seules concernées – sont ici en première ligne. Nous avons tenté dans cette réflexion de trouver un équilibre différent des programmes mieux à même de concilier les volontés apparemment contradictoires de garder le contenu scientifique et de favoriser la réussite de nos élèves.

Pour cela et comme écrit plus haut, la préoccupation de proposer des programmes « réalistes » au vu du niveau des élèves a été centrale. Nous en avons tiré plusieurs conséquences :

- Les évolutions proposées vont plus dans le sens d'une diminution que d'une augmentation. Nous n'avons pas cependant cherché à faire moins, mais si possible à faire mieux.
- L'adaptation aux rythmes de travail et aux exigences du supérieur n'est pas facile. Nous avons donc proposé une période d'adaptation, permettant une insertion plus progressive dans le Premier Cycle. La tension entre contenus et horaires imposait que la durée de cette période soit assez courte (environ 3 semaines).
- Un des buts avoués de cette période est aussi de fournir les outils conceptuels nécessaires très rapidement à l'enseignement des autres disciplines. Cette période n'est donc pas une période de révision, même si elle doit doter tous les élèves de premières bases.
- Nous avons aussi essayé de mieux cerner et de donner à voir les finalités du programme. Nous avons donc fait le choix d'assortir les contenus thématiques d'objectifs clairement précisés. De même, ont été spécifiées assez précisément les limites à apporter dans le traitement des différentes notions. Nous espérons ainsi aider à contenir certaines dérives parfois constatées.
- Nous avons aussi essayé de dégager les grandes lignes de force de notre enseignement (comme la linéarité, la notion d'approximation, …). Les objectifs et les commentaires soulignent cet aspect. Mais aussi, le programme fait émerger quelques points d'aboutissement qui, nous l'espérons, donneront plus à voir le sens des contenus enseignés. Une proposition de progression pédagogique de la filière dite classique[1] renforce ce point de vue.

Cette proposition s'est abstenue de trancher certains points comme celui de l'utilisation et l'enseignement de Maple. Si la situation est actuellement ressentie comme insatisfaisante, nous n'avons pas voulu prendre parti dans ce débat. Nous rappellerons seulement ici l'intérêt d'un tel outil s'il contribue non seulement à illustrer, mais aussi à faire comprendre aux élèves l'intérêt d'un formalisme et de la pratique algorithmique.

<u>Évolutions des contenus</u>

Comme dit précédemment, la réflexion n'est pas partie d'un présupposé d'allégement, encore moins d'extension des contenus enseignés. Le résultat de cette réflexion fait donc apparaître des modifications à la fois sous forme d'ajouts et sous forme de retraits. S'expriment aussi des nuances parfois fortes sur l'importance et le degré de profondeur à apporter à l'étude de tel ou tel thème.
Ce qui suit détaille les grandes évolutions en ce sens.

Les quelques points qui ont été rajoutés correspondent principalement à des points de portée pratique susceptibles d'applications au-delà des seules mathématiques. Il en est ainsi :

- d'une étude simple de deux notions d'usage courant : les courbes paramétrées et les coniques ;
- en algèbre bilinéaire, de la projection sur un sous-espace qui est l'issue naturelle de l'introduction du produit scalaire dans les espaces euclidiens ;
- pour les séries de Fourier, la convergence normale dans le seul cas des fonctions de classe C^2 ne présente pas de difficultés et permet d'aborder les exemples des équations de la chaleur et des cordes vibrantes.

---

1 Bien entendu, ce programme est celui du Premier Cycle et donc s'impose à toutes les filières qu'il propose.

Seuls deux ajouts d'exemples ressortent d'une approche plus « qualitative » : une application simple en dimension infinie du théorème du point fixe ; un exemple de linéarisation d'équation différentielle pour éclairer l'étude du cas linéaire.

D'autres points auraient mérité d'être renforcés, comme l'étude des formules de transformation dans les intégrales curvilignes ou surfaciques. Mais la contrainte horaire déjà très forte sur notre discipline empêche de les prendre en compte dans cette proposition.

Le volume des retraits est plus conséquent et correspond soit à une limitation parfois conséquente des ambitions dans la technicité et le degré d'approfondissement des notions étudiées, soit à des suppressions pures et simples. Il en est ainsi de :

- l'étude des polynômes est simplifié par suppression de l'étude générale des relations entre coefficients et racines ;
- le calcul des primitives est simplifié : ne sera exigible des élèves sans aide particulière que le seul cas des primitives de fractions rationnelles ;
- la règle d'Abel est supprimée de l'étude des suites et des séries ;
- le chapitre dédié aux quadriques est entièrement supprimé : si des exemples isolés pourront être étudiés en cas de besoin, aucune classification ou connaissance n'est exigible des élèves ;
- l'étude des courbes et des surfaces est assez profondément remaniée : l'intégration de cette partie dans le cadre des fonctions de plusieurs variables réelles permettra un gain de temps conséquent ;
- malgré un intérêt réel, le théorème d'inversion locale a été retiré du programme ;
- le théorème des fonctions implicites a été maintenu, mais dans le seul cas des dimensions 2 et 3 ;
- l'étude des systèmes différentiels se restreint au cas des systèmes à coefficients constants homogènes (sans second membre).

Enfin, les différents items du programme ont été assortis de commentaires plus précis sur l'étendue à donner à chacun. Il est apparu important de prévenir ainsi des divergences d'interprétation de la portée réelle de ce programme, et par là d'éviter d'entraîner les élèves soit dans une technicité trop poussée, soit dans des prolongements théoriques inaccessibles dans le cadre horaire imparti à la majorité des élèves. De même, on a veillé à ne pas confondre les champs respectifs des cours, des travaux dirigés, des séances Maple et surtout des évaluations.
Pour la plupart des points qui ont été ainsi commentés, le curseur a été fixé en ayant à l'esprit les difficultés rencontrées par les élèves. Il y a là aussi un resserrement moins immédiatement perceptible, mais réel du programme.
Quelques rares collègues ont parfois proposé d'aller plus loin dans les allègements. Ce point de vue ne nous a paru pas pertinent, vu l'impossibilité déjà soulignée de reporter sur les départements la charge d'introduire des notons de base requises pour beaucoup de modules de troisième année, qu'ils soient mathématiques ou centrées sur d'autres disciplines.

Pour conclure, il importe de souligner une évidence : si le programme qui suit décrit l'ensemble des connaissances qui sont requises des élèves à la fin du Premier Cycle, l'enseignement de ce programme suit une progression de nature cumulative. Autrement dit, tout savoir, toute méthode enseignée à un instant donné peut (et devrait) être sollicité dans la suite. La formation et aussi l'évaluation doivent aussi insister sur la nécessaire mise en cohérence et en synergie des connaissances acquises.

MATHÉMATIQUES EN PREMIER CYCLE
PROGRAMME

OBJECTIFS GÉNÉRAUX

L'objectif premier de notre formation mathématique en premier cycle est l'acquisition des bases nécessaires pour les sciences de l'ingénieur (y compris les mathématiques !). Cela suppose de donner aux élèves la maîtrise effective d'un certain nombre de concepts et d'outils fondamentaux, mais aussi de commencer à motiver dans la mesure du possible cet apprentissage par des contextes et des thématiques inspirés de cas aussi réels que possible.
Plus précisément, la formation mathématique donnée en premier cycle doit clairement se situer non seulement dans le cadre d'une préparation à une formation d'ingénieur, mais être déjà partie prenante de cette formation d'ingénieur.
À ce titre, les enseignements de mathématiques doivent préparer les élèves à se confronter à des situations complexes de résolution de problèmes, nécessitant de mobiliser dans des contextes variés et inédits des concepts mathématiques, de les adapter à une situation et d'en faire un usage pragmatique, adaptée tant à la situation qu'aux objectifs recherchés.
Cet objectif est ambitieux – particulièrement au vu de la formation antérieure de nos élèves – mais nécessaire. La durée réduite de la formation proprement mathématique à l'INSA impose qu'on s'en préoccupe certes très progressivement, mais dès la première année.

Le bon usage d'outils informatiques de résolution (principalement de calcul formel) est à la fois un objectif propre (à poursuivre avec les autres disciplines), et un moyen de s'abstenir de calculs inutiles pour mieux concentrer l'attention sur les notions fondamentales et leur utilisation dans un cadre moins scolaire.

Plus fondamentalement, un fil conducteur de l'enseignement des mathématiques est la notion d'approximation.
À l'issue de la formation, les élèves disposeront des outils à la fois théoriques et pratiques permettant de calculer et de manipuler des solutions exactes ou approchées de problèmes de base des sciences de l'ingénieur. Les idées d'approximation et de domaine de validité d'une solution sont donc centrales et les élèves doivent par conséquent être sensibilisés à l'importance d'une approche numérique et/ou algorithmique.

Les élèves devront disposer d'une certaine habileté au calcul dès le début du cycle. Cette période sera donc l'occasion de vérifier une maîtrise des outils de base (nombres complexes, équations différentielles simples, …) utilisés dans l'apprentissage des autres disciplines. Cette formation éventuellement transversale interviendra dès le début de la première année ou dans le cadre du cours « Outils Mathématiques pour les Sciences de l'Ingénieur ». Elle sera l'occasion d'atténuer le choc d'un changement de rythme trop brutal entre le secondaire et le supérieur.
A contrario, cette formation initiale doit permettre par la suite de développer les techniques enseignées dans un cadre conceptuel adéquat, rigoureux et moderne, mettant les élèves en possibilité d'abstraire des techniques les idées qui les sous-tendent. Il convient en particulier de ne pas réduire la formation à ce qui est exigible d'une majorité des élèves lors des évaluations.

Il est couramment admis que les mathématiques sont un moyen privilégié de développer les capacités de raisonnement. Cet objectif doit trouver toute sa place en premier cycle comme par la suite. Il importe cependant d'en préciser les contours et les modalités. La pratique de la démonstration n'a pas à être systématique dans le cours. L'apprentissage de la rigueur pourra se

faire tout autant en sollicitant les élèves à produire des démonstrations simples, voire à valider ou à invalider une conjecture.
Dans tous les cas, l'intérêt du formalisme doit être présenté et une maîtrise suffisante est exigible. Elle ne doit cependant pas constituer l'obstacle « de trop » à la compréhension des idées. De manière plus générale, l'enseignement doit se concentrer sur les idées, et viser à faire rentrer les élèves dans une certaine « intelligence » de la démarche mathématique et de ses liens réels avec les sciences de l'ingénieur.

La formation mathématique doit en résumé, et au delà des objectifs décrits dans les différents thèmes du programme, rendre apte les élèves à résoudre effectivement des problèmes, à développer progressivement leur autonomie. Plus généralement, elle doit concourir au développement chez les élèves des qualités d'imagination, d'initiative, de travail, de coopération, de rigueur, d'expression qui sont attendues d'un ingénieur INSA.

Le contenu précis du programme de Premier Cycle est présenté par thèmes, en dehors de presque toute considération chronologique. Ce choix doit permettre d'avoir un point de vue global sur ces contenus et de donner la cohérence d'une démarche pédagogique menée sur deux années.
Seule exception, la partie dite des « Notions de base » devra être étudiée suffisamment rapidement pour permettre son utilisation dans les autres enseignements du Premier Cycle.

La liste des thèmes est la suivante :

- Notions de base
- Algèbre
- Algèbre linéaire et bilinéaire
- Fonctions numériques d'une variable réelle
- Intégration
- Suites et séries
- Espaces vectoriels normés
- Fonctions de plusieurs variables réelles
- Équations différentielles.

PROGRAMME PAR THÈME

NOTIONS DE BASE

Objectifs :

Pour l'ensemble des disciplines scientifiques du 1er Cycle, il est indispensable que les élèves maîtrisent, au bout d'un trimestre, un certain nombre de notions de base. Il s'agit d'une part de consolider les acquis de la classe de terminale, d'autre part de fournir des techniques calculatoires qui seront approfondies ultérieurement.

Détail du programme :

- Eléments de logique : vocabulaire de la théorie des ensembles, connecteurs logiques, quantificateurs, types usuels de raisonnement (contraposée, par l'absurde, par récurrence).

Le but principal est ici de fixer la terminologie. On veillera à illustrer par quelques exemples bien choisis les liens et les différences entre logique et langage naturel, on reliera aussi une proposition à son domaine de vérité.

- Compléments sur les nombres complexes : propriétés algébriques, forme exponentielle, racines nièmes, résolution des équations du second degré.

Le rappel des propriétés algébriques sera l'occasion de travailler sur l'utilisation des signes Σ *et* Π*, de revoir les sommes partielles de séries arithmétiques et géométriques, la formule du binôme et les formules de base du dénombrement.*

- Géométrie : repères dans le plan et dans l'espace, produit scalaire, produit vectoriel, déterminant et produit mixte.

L'interprétation géométrique des notions sera systématiquement mise en avant. Les TD seront l'occasion de vérifier que les élèves savent identifier et manipuler les objets géométriques les plus simples (vecteurs, droites, plans, cercles, sphères,…).

- Equations différentielles linéaires : résolution des équations $y'(t)+a(t)y(t)=f(t)$ et $y''(t)+ay'(t)+by(t)=f(t)$, où le second membre $f(t)$ sera restreint aux cas utiles aux autres disciplines (fonctions constantes, trigonométriques, exponentielles).

Pour traiter les équations d'ordre 2, on introduira, de manière élémentaire, l'exponentielle complexe et les propriétés de la fonction $t \mapsto e^{at}$ $(a \in \mathbb{C})$.

- Courbes : courbes paramétrées, vecteur tangent.

ALGÈBRE

Objectifs :

Le programme de premier cycle est essentiellement tourné vers l'analyse. La partie algèbre est donc réduite et principalement orientée vers la décomposition des polynômes et des fractions rationnelles, en vue des applications en analyse (développements limités et recherche de primitives). Néanmoins il nous apparaît important de sensibiliser les étudiants à la démarche algébrique à l'aide de quelques exemples judicieux sans pour autant faire un cours exhaustif sur les structures algébriques.

Les structures étudiées sont $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ avec pour objectif la décomposition des polynômes et des fractions rationnelles.

La distinction entre polynôme et fonctions polynomiales sera faite en cours, mais on laissera la plus grande liberté au niveau de l'utilisation. Les polynômes et leur maniement fournissent de bonnes illustrations, en début de première année, de raisonnements mathématiques notamment utilisant des récurrences. On insistera sur la caractérisation et le nombre de racines d'un polynôme en distinguant le cas réel du cas complexe.

Détails du programme :

- Les complexes :
  - Formule du binôme.
  - Racines *n*-ièmes d'un complexe non nul.
  - Résolution des équations du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$.
- Les polynômes :
  - Polynômes à coefficients réels ou complexes : définitions et notations.
  - Sommes et produits de polynômes. Anneau des polynômes.
  - Division euclidienne et division par puissances croissantes.

  Ces opérations seront largement utilisées pour la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples, et la recherche de développements limités.
  - Racines d'un polynôme : caractérisation de la divisibilité par $X-a$, ordre de multiplicité d'une racine.
  - Formule de Taylor. Application à la caractérisation des racines multiples.
  - Théorème de d'Alembert (admis). Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.
  - Somme et produit des racines.
- Les fractions rationnelles :
  - Notions de fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
  - Pôle et ordre de multiplicité d'une fraction rationnelle.
  - Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

  Les élèves devront être capables de passer de l'une à l'autre (principalement dans le cas des pôles simples).

ALGÈBRE LINÉAIRE ET BILINÉAIRE

Objectifs :
L'objectif premier est que les élèves reconnaissent la linéarité de certains modèles et sachent identifier les structures d'espaces vectoriels. Il faut aussi montrer l'intérêt du linéaire et des propriétés très particulières qui y sont attachées et l'efficacité qui en découle pour la résolution effective quand les problèmes sont linéaires.

La notion de dimension (qui est à relier avec le concept usuel de degrés de liberté) et celle de base sont centrales.
Si quelques exemples de dimension infinie sont nécessaires (espaces de fonctions ou de suites), cette partie visera d'abord une bonne maîtrise du calcul dans un espace de dimension finie. Les élèves devront avoir compris que ce calcul se ramène à celui dans $\mathbb{K}^n$ via une base.
Le choix « stratégique » d'une base est un élément essentiel de résolution d'un problème, les élèves doivent y être sensibilisés et exercés via quelques applications classiques (par exemple de géométrie ou calcul de puissances d'une matrice).
La notion de vecteur propre apparaît naturellement dans ce cadre et l'importance de cette notion devra être mise en évidence, avec en particulier l'étude de la diagonalisation des endomorphismes en dimension finie.
Pour toutes ces notions, une maîtrise réelle sur des exemples raisonnables sera exigible.

Deux outils fondamentaux sont la résolution de systèmes linéaires et le calcul matriciel.
Le calcul matriciel est utilisé en permanence lors de la scolarité de l'INSA. Les élèves devront en maîtriser la technique et l'interprétation dans des contextes différents (changement de base, systèmes linéaires, endomorphismes, formes quadratiques).
Pour les systèmes linéaires, on attendra que les élèves sachent dans des cas simples poser un système, le résoudre et interpréter la solution. Vu l'existence de logiciels performants, la résolution de systèmes un peu « lourds » n'est pas un objectif du programme.

L'étude de l'algèbre bilinéaire a deux finalités :
- d'une part, la présentation des espaces euclidiens ;
- d'autre part, celle des formes quadratiques.

La notion de produit scalaire est centrale tant en dimension finie qu'en dimension infinie. Les élèves devront être capables de reconnaître un produit scalaire, et d'utiliser la norme associée. En outre, en dimension finie, les exigences iront jusqu'à la maîtrise des bases orthonormales. Comme précédemment, les aspects géométriques devront être soulignés en permanence et exploités autant que possible.

L'étude des formes quadratiques a pour perspective leur réduction à l'aide de la diagonalisation des matrices symétriques réelles. Les applications visées sont l'étude des courbes et des surfaces (où la notion de signature sera utilisée pour la classification) et le traitement des extrema locaux.

Détails du programme :
- Espaces vectoriels :
  - Combinaisons linéaires ;
  - Espaces et sous-espaces vectoriels, opérations (intersection, somme, somme directe) sur les espaces vectoriels, sous-espaces supplémentaires ;
  - Familles de vecteurs génératrices, familles libres et liées, bases, dimension d'un espace vectoriel, coordonnées d'un vecteur, notion de rang.

Les exemples exotiques sont à proscrire. Les corps de référence sont ici $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- Applications linéaires :
  - Notions d'homomorphisme et d'isomorphisme, d'endomorphisme et d'automorphisme ;
  - Image et noyau, image d'un système de vecteurs (générateur, libre) ;
  - Résolution d'un système linéaire ;
  - Rang d'une application linéaire (en dimension finie), écriture analytique, théorème du rang ;
  - Structure de l'ensemble des applications linéaires de E dans F, de l'ensemble des endomorphismes de E.

  Cette partie est l'occasion d'un exposé succinct sur les projections et symétries, mais en se limitant aux propriétés géométriques et aux caractérisations (sans démonstration). Les exemples nombreux et variés (de toute dimension) devront illustrer l'intérêt de ces notions. On montrera le lien avec le calcul matriciel.
- Matrices :
  - Notations matricielles, matrice d'une application linéaire ;
  - Espace vectoriel des matrices rectangulaires $p \times n$, rang d'une telle matrice ;
  - Opérations sur les matrices (multiplication, transposition) ;
  - Opérations sur les matrices carrées $n \times n$ et matrices particulières (symétrique, diagonale, triangulaire, …) ;
  - Matrices inversibles ;
  - Matrice de passage, semblables et équivalentes.

  Les liens avec les applications linéaires et les changements de base seront faits de manière constante.
- Déterminants :
  - Déterminants en dimension 2 ou 3, définition en dimension n comme forme n-linéaire alternée, écriture générale et propriétés, développement par rapport à une ligne ou une colonne ;
  - Déterminant d'un produit (sans démonstration), calcul de l'inverse d'une matrice ;
  - Applications aux systèmes de vecteurs, aux endomorphismes.

  En admettant certains résultats, on renoncera aux démonstrations sans portée pratique ou pédagogique (forme alternée, développement par rapport à une ligne ou une colonne, déterminant d'un produit).
- Systèmes linéaires :
  - Méthode de Gauss, rang d'un système ;
  - Cas des systèmes de Cramer en petite dimension (théorème et résolution).

  On visera une bonne maîtrise des étudiants sur toutes les configurations de système.
- Diagonalisation :
  - Vecteur et sous-espace propres, valeur propre ;
  - Polynôme caractéristique et développement ;
  - Matrices diagonalisables, cas des valeurs propres distinctes, condition nécessaire et suffisante de diagonalisation.

  Cette partie est un point d'aboutissement de ce thème, et offre la possibilité de synthèse basée sur des problèmes concrets, par exemple l'étude de systèmes différentiels ou de suites récurrentes. On privilégiera le point de vue des endomorphismes pour garder le lien avec les applications. L'illustration avec un TP Maple serait souhaitable.
- Formes bilinéaires et quadratiques :
  - Formes bilinéaires symétriques ;
  - Formes quadratiques ;
  - Expression matricielle en dimension finie et changement de base.

- Produits scalaires :
    - Définition et propriétés du produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz ;
    - Espaces euclidiens : bases orthonormales et procédé d'orthogonalisation de Schmidt ;
    - Projection sur un sous-espace.
- Diagonalisation des matrices symétriques réelles :
    - Diagonalisation des matrices symétriques réelles ;
    - Applications : réduction des formes quadratiques réelles, signature d'une forme quadratique.

  La démonstration de l'existence d'une base orthonormale de vecteurs propres pourra être faite en cours. La classification des coniques est l'exemple classique à traiter en séance de travaux dirigés.

FONCTIONS NUMÉRIQUES D'UNE VARIABLE RÉELLE

Objectifs :

Un ingénieur travaille dans un environnement où la notion de fonction est omniprésente. La modélisation des phénomènes s'appuie sans arrêt sur cette notion.

Pour faire court, l'étude des fonctions d'une seule variable est nécessaire dès le début du cursus, tandis que celle des fonctions de plusieurs variables sera achevée en deuxième année.

L'étude des fonctions numériques d'une seule variable est donc menée dans la continuité de ce que les étudiants ont appris en terminale. Les notions de limite, de continuité, de dérivabilité sont présentées dans un contexte plus formalisé permettant l'utilisation d'outils théoriques performants. On introduira ensuite les relations d'équivalence et de « négligeabilité » qui permettent de comparer les fonctions au voisinage d'un point et de calculer plus efficacement certaines limites.

Puis viendront les énoncés de calcul différentiel, les formules de Taylor-Young et de Taylor-Lagrange permettant souvent une étude locale ou globale des phénomènes étudiés. Des techniques de majoration d'erreur seront enseignées afin de quantifier la qualité de certaines approximations.

Enfin, certains algorithmes permettant d'approcher la solution d'une équation seront présentés. Ces techniques permettront souvent d'utiliser des suites et de les associer à l'étude des fonctions.

Détails du programme :

- Les réels :
  - $\mathbb{R}$ est un corps commutatif totalement ordonné.
  - Notions sur les nombres rationnels et irrationnels. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
  - Majorant, minorant, plus grand élément, plus petit élément, borne supérieure, borne inférieure.
  - Propriété fondamentale : toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée (resp. minorée) admet une borne sup (resp inf).
- Limite et Continuité :
  - Limites : définition et propriétés.
  - Continuité en un point : définition, exemples et contre-exemples, opérations.

  Dans un premier temps on illustrera les notions au moyen d'exemples et de contre-exemples simples en s'appuyant chaque fois que cela est possible sur des illustrations graphiques. Ensuite on écrira des définitions avec les quantificateurs.
  - Continuité sur un intervalle : Image d'un intervalle, théorème des valeurs intermédiaires.
  - Image d'un intervalle fermé et borné.

  On montrera tout l'intérêt d'étudier une fonction continue sur un intervalle fermé et borné pour des problèmes de majoration, ou de minoration.
  - Fonctions monotones sur un intervalle.
  - Fonctions réciproques : bijection, bijection réciproque, cas des fonctions continues et strictement monotones sur un intervalle, propriétés de la bijection réciproque : sens de variation, continuité, dérivabilité.
- Étude des fonctions « élémentaires » :
  - Logarithmes, exponentielles et puissances.
  - Fonctions circulaires réciproques: arccos, arcsin et arctan.
  - Fonctions hyperboliques : ch, sh, th, argch, argsh et argth.

  On montrera l'intérêt de ces fonctions dans le paramétrage du cercle, de l'ellipse et de l'hyperbole.
- Comparaison de deux fonctions :
  - Négligeabilité et équivalence : définitions, notations et propriétés.

- Compatibilité avec les opérations, le logarithme, l'exponentielle, les puissances.

On insistera sur le respect des règles de calcul, en particulier à propos de l'addition.

- Comparaison au voisinage de 0 et de $+\infty$ des fonctions logarithmes, exponentielles et puissances ;

- Calcul différentiel.
  - Théorème de Rolle. Théorèmes des accroissements finis et applications.
  - Fonctions de classe C^n et C^∞ sur un intervalle. Formule de Leibniz.
  - Formule de Taylor-Lagrange. Formule de Taylor-Young. Application : Etude de la position d'une courbe par rapport à sa tangente.

Bien insister sur la différence entre ces deux formules : la formule de Taylor-Lagrange a un caractère global alors que celle de Taylor-Young a un caractère local. Un TP Maple permettra d'illustrer ces notions.

- Développements limités :
  - Définitions et propriétés classiques.
  - Opérations sur les développements limités : somme, produit et quotient.
  - Composition des développements limités.
  - Intégration et dérivabilité d'un développement limité.
  - Développements limités généralisés et développements asymptotiques. Application : étude des branches infinies d'une courbe.

INTÉGRATION

Objectifs :
On construit l'intégrale d'une fonction comme la limite d'une suite d'intégrales de fonctions constantes par morceaux. Les objectifs sont d'une part de retrouver l'association naturelle entre intégrale et aire, et d'autre part d'initier les étudiants à l'état d'esprit de l'intégration numérique.

Le cours de calcul intégral est dans la suite du cours de calcul différentiel pour les fonctions d'une variable réelle. La maîtrise des techniques du calcul intégral à une variable constitue un objectif essentiel de la première année. Cela passe par la consolidation des acquis de classe de terminale (primitives des fonctions usuelles, intégration par parties) et un recours aux connaissances acquises antérieurement dans l'année (fonctions usuelles, en particulier les fonctions hyperboliques et les fonctions réciproques, décomposition en éléments simples). Une bonne assimilation de la formule de changement de variable est impérative.

Concernant l'intégrale généralisée (ou impropre) l'objectif du programme est la maîtrise de la notion de convergence pour une intégrale d'une fonction réelle sur un intervalle non fermé ou non borné, à l'aide de critères différents. Cette démarche qualitative fait appel aux outils de comparaison de fonctions. Elle se retrouvera à propos de l'étude des séries numériques.

L'intégrale de fonctions de deux ou trois variables est introduite, de manière analogue au cas d'une variable, comme limite d'une suite d'intégrales de fonctions constantes par morceaux (sur des rectangles pour deux variables, et des pavés pour trois). L'important est de maîtriser le calcul de ces intégrales en se ramenant à des intégrales simples successives et au moyen de changements de variables. On insistera notamment sur le passage aux coordonnées polaires, cylindriques et sphériques.

Les intégrales curvilignes et surfaciques, en général introduites dans un enseignement OMSI sont utilisées au premier cycle en physique et en mécanique (théorie des champs). Pour calculer ces intégrales, les étudiants doivent maîtriser l'usage de paramétrages simples de courbes et surfaces.

Détails du programme :

- Intégration sur un intervalle fermé et borné des fonctions à valeurs réelles :
    - Fonctions en escalier et intégrale d'une fonction en escalier (propriétés).
    - Fonctions Riemann intégrables, définition et principaux exemples : les fonctions monotones, monotones par morceaux, continues, continues par morceaux.

  L'important est de faire comprendre le passage d'une somme d'aire de rectangles à une intégrale grâce à la notion de passage à la limite, on insistera sur les illustrations graphiques.
    - Propriétés de l'intégrale de Riemann (linéarité, croissance, relation de Chasles). Formule de la moyenne.

  On pourra démontrer certaines de ces propriétés à partir des propriétés correspondantes de l'intégrale des fonctions en escalier.
    - Étude de $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ (continuité si f intégrable, dérivabilité si f continue), lien entre intégrale et primitives des fonctions continues.
    - Calcul d'intégrales : intégration par parties, changement de variable.
    - Formule de Taylor avec reste intégral.

- Calcul de primitives : calcul de primitives de fonctions usuelles ; calcul de primitives « par parties », changement de variable, en particulier le cas où on doit utiliser un changement de variable bijectif ; techniques de calcul de primitives d'une fraction rationnelle.

On se limitera à des cas simples d'intégration par décomposition en éléments simples. Lors des exercices dans les autres cas, les changements de variables permettant de retrouver une fraction rationnelle seront fournis aux étudiants.

- Calcul approché d'une intégrale : par exemple, la méthode des rectangles, des trapèzes. On pourra indiquer que l'on ne sait pas toujours exprimer les primitives d'une fonction continue à l'aide des fonctions usuelles et qu'il convient alors de disposer de méthodes pour calculer des valeurs approchées de l'intégrale.

- Intégrales généralisées ou impropres
  - Fonctions localement intégrables sur un intervalle.
  - Définition de la convergence ou de la divergence d'une intégrale impropre sur un intervalle non fermé ou non borné; cas des intégrales faussement impropres et des intégrales doublement impropres.
  - Calcul d'intégrales généralisées : utilisation des primitives, changement de variable C^1 et bijectif, intégration par parties.

On présentera l'exemple fondamental des fonctions puissances (intégrales dites « de Riemann »).

  - Intégrales des fonctions positives : la croissance de la fonction « intégrale de la borne d'en haut » donne une condition nécessaire et suffisante de convergence de l'intégrale. Inégalités et convergence; intégrales de fonctions équivalentes.
  - Intégrales absolument convergentes : définition, la convergence absolue implique la convergence, (mais la réciproque est fausse). Si $f = o(g)$ avec g positive et d'intégrale convergente, alors l'intégrale de f est absolument convergente.
  - Critère de Riemann au voisinage de $+\infty$:
    - premier cas : f équivalente à l'inverse d'une fonction puissance ;
    - deuxième cas : $f(t) = o\left(\frac{1}{t^a}\right)$ avec $a > 1$ ou de manière équivalente $\lim\limits_{t \to +\infty} t^a f(t) = 0$;
    - troisième cas : $\lim\limits_{t \to +\infty} t^a f(t) = \pm\infty$ avec $a \leq 1$.
  - Critère de Riemann au voisinage d'un réel a (trois cas également).
- Intégrales de deux ou trois variables réelles.
  - Notions sur la construction de l'intégrale d'une fonction continue sur une partie fermée et bornée à partir de pavages de cette partie et des sommes de Riemann associées.

La construction sera donnée sans démonstration rigoureuse, il s'agit seulement de faire comprendre le lien entre l'intégrale double d'une fonction et le volume sous la surface associée à cette fonction. On généralise ensuite cette construction au cas de trois variables.

  - Propriétés de l'intégrale : linéarité, inégalités, additivité par rapport au domaine d'intégration.

Ces résultats seront donnés sans démonstration.

  - Calcul d'intégrales : expression d'une intégrale double à l'aide de deux intégrales simples successives ; d'une intégrale triple à l'aide de trois intégrales simples ou d'une double et d'une simple.
  - Formules de changement de variable.

On insistera sur les passages aux coordonnées polaires, cylindriques et sphériques.

- Intégrales curvilignes et surfaciques.

- Définition et procédés de calculs, longueur d'une courbe paramétrée et aire d'une surface paramétrée.
- Circulation d’un champ de vecteurs le long d’une courbe, flux d’un champ de vecteurs à travers une surface ;
- Formules de transformation (théorèmes de Stokes et Ostrogradski).

Tous les types d'intégrales seront utilisés également pour la géométrie des masses (masse, moment d'inertie, coordonnées du centre d'inertie).

SUITES ET SÉRIES

Objectifs :

La résolution effective d'un problème concret passe le plus souvent non par la détermination d'une solution explicite, mais par celle d'une famille de solutions approchées. Les suites et séries sont donc des outils fondamentaux, dont les élèves doivent posséder une bonne maîtrise. Elles seront étudiées dans cette perspective.

L'étude des suites numériques donne tout d'abord un point de vue indispensable sur l'ensemble des réels. Elle se prolongera plus tard dans le cadre des espaces vectoriels normés avec le théorème du point fixe. Les propriétés variées des suites et séries de fonctions permettent de résoudre de nombreux problèmes physiques (par exemple les équations de la chaleur et des cordes vibrantes) dans un cadre rigoureux, qui fournit aussi naturellement des solutions approchées à ces problèmes.

Détails du programme :

- Suites de réels :
  - Convergence d'une suite, limites infinies, propriétés algébriques, inégalités, suites extraites ;
  - Caractérisation séquentielle de la continuité, des bornes supérieures et inférieures de parties de $\mathbb{R}$.
  - Suites bornées, suites monotones, suites adjacentes. Application : de toute suite bornée on peut extraire une suite convergente.
  - Suites arithmétiques et géométriques, suites définies par une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, propriétés de monotonie et de convergence.
- Séries numériques :
  - Définition de la convergence, propriétés algébriques, exemples des séries géométriques.
  - Séries à termes positifs, propriétés de comparaison, séries de Riemann.
  - Suites de Cauchy, $\mathbb{R}$ est complet.
  - Séries absolument convergentes, critères de Cauchy, d'Alembert et Riemann, produit de deux séries absolument convergentes.

  On pourra alors étudier des exemples et contre-exemples sur le changement de l'ordre des termes d'une série et leur regroupement.
  - Séries alternées.
- Suites de fonctions :
  - Convergence simple et convergence uniforme ;
  - Liens de la convergence uniforme avec la continuité, l'intégrabilité et la dérivabilité.
- Séries de fonctions :
  - Convergences simple, uniforme, normale ; relations entre ces convergences.
  - Séries entières : rayon de convergence, propriétés de la somme d'une série entière à l'intérieur du disque de convergence, fonctions développables en série entière, exemple de l'exponentielle complexe,

  On pourra par exemple en TD utiliser les séries entières pour résoudre certaines équations différentielles linéaires.
  - Séries de Fourier : définition, expression des coefficients (formes réelles et complexes), théorèmes de convergence.

  Le théorème de convergence simple de Dirichlet sera admis, mais la convergence normale sera démontrée dans le cas des fonctions de classe C^2. On pourra motiver cette étude par des applications simples (traitement du signal).
  - Applications : résolution de l'équation de la chaleur et de celle des cordes vibrantes.

ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Objectifs :

Les espaces vectoriels normés sont le cadre naturel pour présenter et traiter des problèmes d'approximation. De ce point de vue, le théorème du point fixe est un résultat très important de ce chapitre.

Par ailleurs, l'étude des espaces vectoriels normés est un préliminaire à celle du calcul différentiel.

Détails du programme :

- Norme
  - Définition
  - Normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$ ($\| \|_1$, $\| \|_2$, $\| \|_\infty$).
  - Norme infinie sur $C^0([0,1])$
  - Normes équivalentes, toutes les normes sont équivalentes en dimension finie (admis)
  - Normes matricielles induites, cas des normes $\| \|_1$, $\| \|_2$, $\| \|_\infty$.
- Propriétés métriques
  - Ouvert, fermé
  - Suites, convergence des suites
  - Toute suite de Cauchy de $\mathbb{R}^n$ converge
  - Toute suite de Cauchy de $C^0([0,1])$ (pour la norme infinie) converge
  - Fonctions continues, lipschitziennes sur un espace normé.
- Théorème du point fixe
  - Cas où l'application est globalement contractante ;
  - Cas où l'application est contractante sur un domaine stable ;
  - Exemples en toutes dimensions ;
  - Méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel

  On pourra aussi montrer l'intérêt théorique de ce théorème en dimension infinie : par exemple existence et unicité des solutions d'une équation différentielle non linéaire, cas général, avec hypothèses simplificatrices.

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES RÉELLES

Objectifs :

Les fonctions de plusieurs variables interviennent naturellement dans l'étude des modèles et des phénomènes faisant intervenir plus d'un paramètre. L'opportunité de donner des exemples concrets est donc ici particulièrement facile à saisir.

Les définitions de fonctions différentiables et de différentielles seront données dans le cas général, ce qui permet d'insister sur la notion d'approximation de la fonction au voisinage d'un point. Cependant, le cadre quasi-permanent d'étude est celui de la dimension finie et des fonctions à dérivées partielles continues. On ne débordera pas de ce cadre lors des évaluations. Les courbes paramétrées ont été présentées dans le thème « Notion de base » et donc étudiées en début de Premier Cycle : on présentera ici les surfaces en illustrant le théorème de fonctions implicites.

Détails du programme :

- Définition de la différentiabilité pour une application
  Cette définition pourra être donnée dans un cadre général d'espace vectoriel normé de dimension quelconque, mais la suite du cours et tous les exercices devront avoir pour cadre la dimension finie).
- Différentiabilité en dimension finie
  - Dérivées partielles, matrice jacobienne, vecteur gradient pour les fonctions de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$.
  - Tangente à une courbe $y = f(x)$; plan tangent à une surface $z = f(x, y)$.
  - Dérivées partielles, différentielle, matrice jacobienne (cas $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$).

  Pour toute la suite du thème, on se limitera au cas des fonctions de classe C^1.
- Applications de classe C^1
  - Toute application admettant des dérivées partielles continues sur un ouvert est différentiable sur cet ouvert.

  Il pourra être intéressant de démontrer ce résultat dans le cas des petites dimensions.
  - Opérations sur les différentielles (somme, produit, composition).
  - Changements de variables (C^1-difféomorphismes), exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles par changement de variable.
  - Inégalité des accroissements finis. Application à l'utilisation du théorème du point fixe.
- Développement de Taylor au second ordre (fonctions de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$).
  - Applications de classe C^2.
  - Matrice Hessienne, théorème de Schwarz (admis) ;
  - Développement de Taylor-Young à l'ordre deux ;
  - Recherche d'extrema locaux et de points critiques (classification) ;
  - Exemples de problèmes d'optimisation.
- Courbes et surfaces :
  - Coniques planes (équations cartésiennes par foyer et directrice, équations paramétriques);
  - Courbes et surfaces paramétrées de $\mathbb{R}^3$: plan tangent, courbes coordonnées ;
  - Surfaces particulières (de révolution, cylindriques, coniques)

  Ces exemples seront présentés en TD à l'aide de Maple.
- Théorème des fonctions implicites (admis) :
  - cas $f(x, y) = 0$: tangente, position de la courbe par rapport à la tangente
  - cas $f(x, y, z) = 0$: plan tangent, position de la surface par rapport au plan tangent
  - cas $f(x, y, z) = 0$ et $g(x, y, z) = 0$: tangente à la courbe.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Objectifs :
Ce thème est principalement consacré aux équations et aux systèmes différentiels linéaires. Quelques exemples d'équations différentielles non linéaires seront abordés à la fin. Il sera illustré par des exemples issus de différents champs disciplinaires.

Détails du programme :

- Généralités sur $x'(t) = f(x(t), t)$, la fonction *x(t)* étant à valeur dans $\mathbb{R}^n$.
  - Équation différentielle linéaire. Équation différentielle linéaire avec second membre.
  - Théorème (admis) d'existence et d'unicité des solutions pour une équation ou un système différentiel linéaire (avec second membre), ensemble des solutions.
- Équations différentielles linéaires du premier et du deuxième ordre

Il s'agit ici de compléments, voir aussi le thème « Notions de base ».

  - Équation avec second membre : méthode de la variation de la constante, calcul explicite des solutions.
  - Abaissement de l'ordre.

  On donnera à cette dernière méthode une place réduite (par exemple en TD), proportionnée à son utilité pratique.

- Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants
  - Sans second membre : Calcul et expression des solutions dans le cas des matrices diagonalisables.

  On pourra mener en TD (éventuellement en association avec d'autres disciplines) l'étude sur un exemple des problèmes de stabilité et de trajectoire.

- Équations différentielles non linéaires
  - Quelques exemples simples d'équations différentielles non linéaires : variables séparables, …
  - Initiation à la linéarisation sur un exemple.

  Un exemple, décidé chaque année en commun, pourra faire l'objet d'une étude plus approfondie, prenant notamment en compte l'examen des différents comportements des solutions.